

Programmazione lineare

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

Problema del contadino

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, 3 t di tuberi e 20 t di concime per ettaro di patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Problema del contadino - modello di PL

Variabili decisionali:

x_L = numero di ettari da coltivare a lattuga

x_P = numero di ettari da coltivare a patate

Modello di programmazione lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 3000x_L + 5000x_P \\ x_L + x_P \leq 12 \\ 7x_L \leq 70 \\ 3x_P \leq 18 \\ 10x_L + 20x_P \leq 160 \\ x_L \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{array} \right.$$

Massimizzare guadagno

Ettari coltivabili

Kg di semi

t di tuberi

Concime richiesto da ogni coltivazione

Numero ettari di lattuga

Numero ettari patate

Forma matriciale

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ \text{dove } x = & \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x_L + x_P \leq 12$$

$$x_L \leq 10$$

$$x_P \leq 6 \quad (18/3)$$

$$x_L + 2x_P \leq 16$$

$$-x_L \leq 0$$

$$-x_P \leq 0$$

$$Ax \leq b \quad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

x_L x_P

m = numero di vincoli

n = numero di variabili

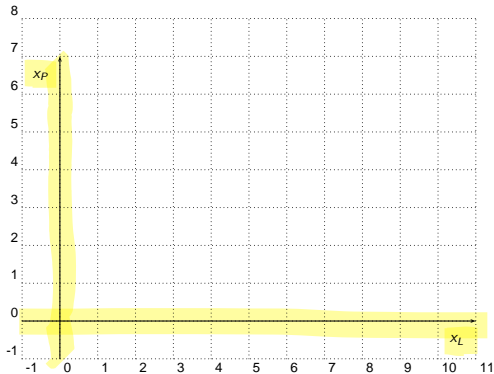
A matrice $m \times n$

b vettore con m componenti

c vettore con n componenti

Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_L + 5x_P \\
 \text{s.t.} \quad & x_L + x_P \leq 12 \\
 & x_L \leq 10 \\
 & x_P \leq 6 \\
 & x_L + 2x_P \leq 16 \\
 & -x_L \leq 0 \\
 & -x_P \leq 0
 \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max 3x_L + 5x_P$$

$$x_L + x_P \leq 12$$

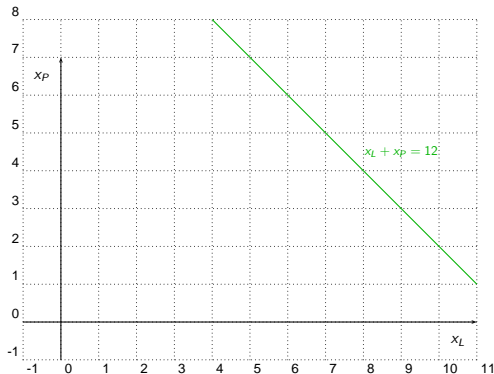
$$x_L \leq 10$$

$$x_P \leq 6$$

$$x_L + 2x_P \leq 16$$

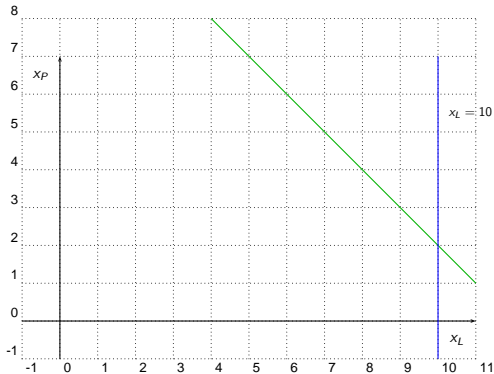
$$-x_L \leq 0$$

$$-x_P \leq 0$$



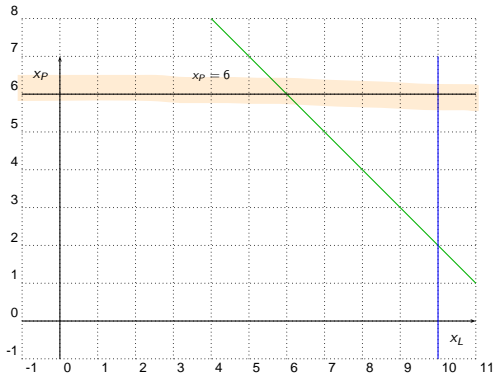
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_L + 5x_P \\
 \text{s.t.} \quad & x_L + x_P \leq 12 \\
 & x_L \leq 10 \\
 & x_P \leq 6 \\
 & x_L + 2x_P \leq 16 \\
 & -x_L \leq 0 \\
 & -x_P \leq 0
 \end{aligned}$$



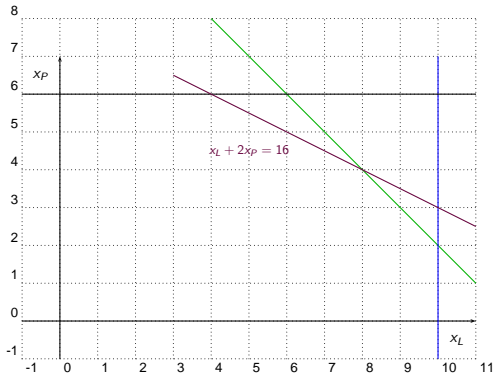
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_L + 5x_P \\
 \text{s.t.} \quad & x_L + x_P \leq 12 \\
 & x_L \leq 10 \\
 & x_P \leq 6 \\
 & x_L + 2x_P \leq 16 \\
 & -x_L \leq 0 \\
 & -x_P \leq 0
 \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_L + 5x_P \\
 \text{s.t.} \quad & x_L + x_P \leq 12 \\
 & x_L \leq 10 \\
 & x_P \leq 6 \\
 & x_L + 2x_P \leq 16 \\
 & -x_L \leq 0 \\
 & -x_P \leq 0
 \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max 3x_L + 5x_P$$

$$x_L + x_P \leq 12$$

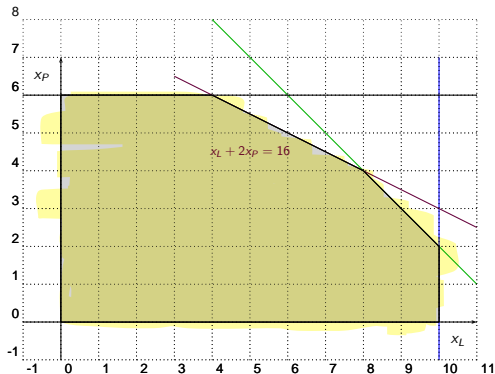
$$x_L \leq 10$$

$$x_P \leq 6$$

$$x_L + 2x_P \leq 16$$

$$-x_L \leq 0$$

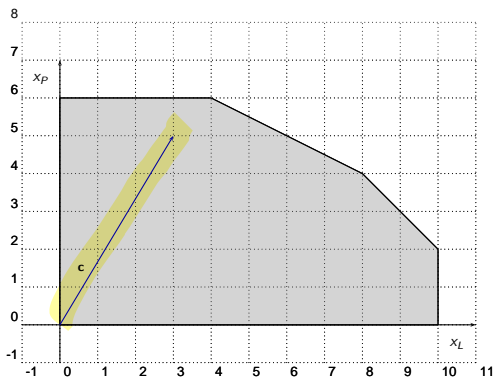
$$-x_P \leq 0$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

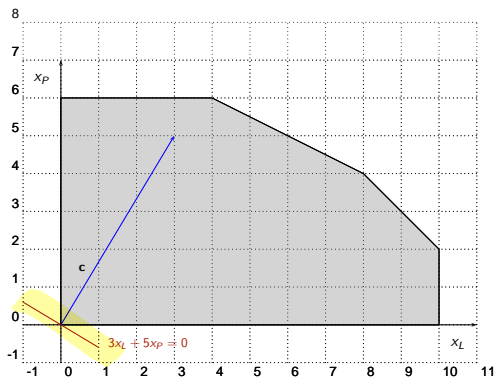
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

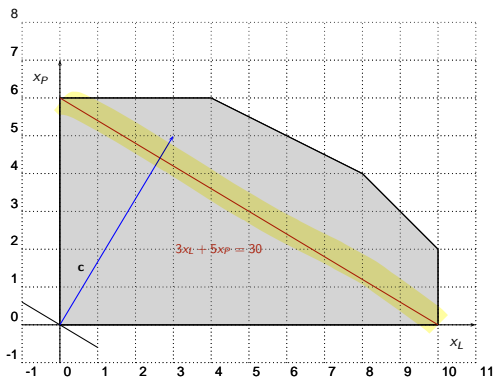
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

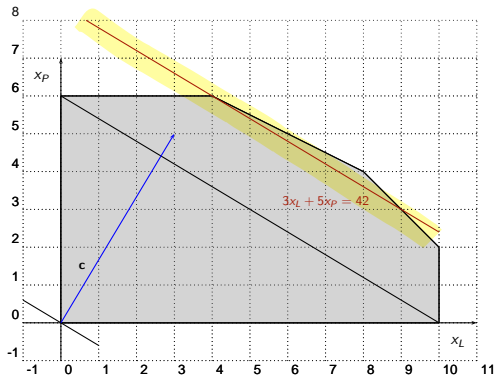
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$,
dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

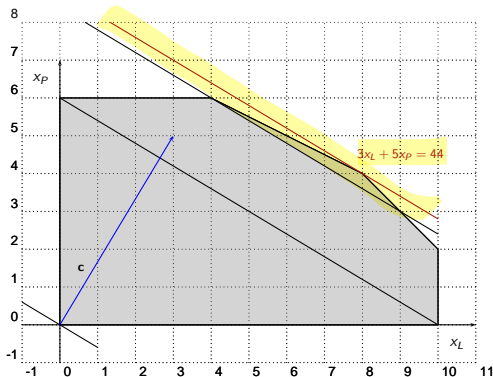
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

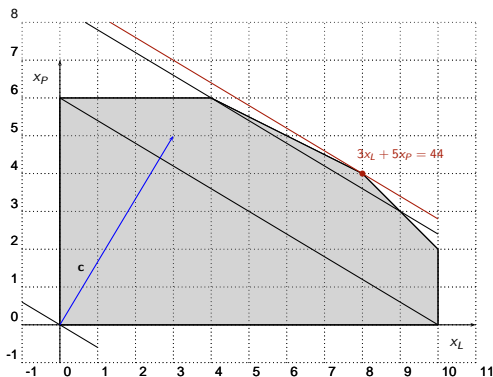
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli **insiemi di livello** della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Soluzione ottima: $x_L = 8, x_P = 4$ (8 ettari di lattuga, 4 ettari di patate)

Valore ottimo = 44 (ricavo massimo 44000 €)

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{ o } \min) \ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{ o } \min) \ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

Definizione

Un problema nella forma

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

è chiamato problema di PL in forma canonica.

Forma generale e forma canonica

Teorema

Ogni problema di PL può essere riscritto in modo equivalente in forma canonica.

Dim. $\min c^T x = -\max (-c^T x)$

$a^T x \geq b$ è equivalente a $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$ è equivalente a $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$

Esercizio

Scrivere in forma canonica il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 17 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione convessa** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

La somma dei
coefficienti è 1

La somma restituisce
il valore del vettore

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione convessa** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(4, 0)$ e $(1, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{3}(4, 0) + \frac{2}{3}(1, 3).$$

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{1}{2}(2, 3).$$

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione convessa** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(4, 0)$ e $(1, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{3}(4, 0) + \frac{2}{3}(1, 3).$$

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{1}{2}(2, 3).$$

Definizione

L'**inviluppo convesso** di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le **combinazioni convesse di punti di K** .

Esercizio. Qual è l'inviluppo convesso dei punti $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$?

Identificare la regione più piccola che contiene tutti e 3 i punti

Dato $x(1,1) + y(3,1) + z(2,3) \Rightarrow$ l'inviluppo è dato dalla figura geometrica delimitata dai 3 punti in questione, in questo caso un TRIANGOLO

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione convessa** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(4, 0)$ e $(1, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{3}(4, 0) + \frac{2}{3}(1, 3).$$

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$. Infatti:

$$(2, 2) = \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{1}{2}(2, 3).$$

Definizione

L'**inviluppo convesso** di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di K .

Esercizio. Qual è l'inviluppo convesso dei punti $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$?

Definizione

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto **convesso** se per ogni $x, y \in K$ il vettore $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K$ per ogni $\alpha \in [0, 1]$.

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione conica** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

I coefficienti sono tutti i numeri reali positivi

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione conica** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4, 4)$ è combinazione conica di $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Infatti:

$$(4, 4) = \frac{8}{7}(2, 3) + \frac{4}{7}(3, 1).$$

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione conica** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4, 4)$ è combinazione conica di $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Infatti:

$$(4, 4) = \frac{8}{7}(2, 3) + \frac{4}{7}(3, 1).$$

Definizione

L'**inviluppo conico** di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{cono}(K)$, è l'**insieme** di tutte le combinazioni coniche di punti di K .

Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione conica** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4, 4)$ è combinazione conica di $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Infatti:

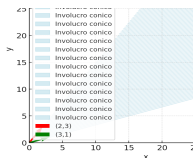
$$(4, 4) = \frac{8}{7}(2, 3) + \frac{4}{7}(3, 1).$$

Definizione

L'**inviluppo conico** di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{cono}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K .

Esercizio. Qual è l'inviluppo conico di $(2, 3)$ e $(3, 1)$?

È data dalla regione contenuta tra i 2 vettori di coordinate $(2,3)$ e $(3,1)$, che parte dall'origine e va all'infinito



Combinazioni coniche

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **combinazione conica** dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tali che $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$.

Esempio. $(4, 4)$ è combinazione conica di $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Infatti:

$$(4, 4) = \frac{8}{7}(2, 3) + \frac{4}{7}(3, 1).$$

Definizione

L'**inviluppo conico** di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{cono}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K .

Esercizio. Qual è l'inviluppo conico di $(2, 3)$ e $(3, 1)$?

Definizione

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto **cono** se per ogni $x \in K$ il vettore $\alpha x \in K$ per ogni $\alpha \geq 0$.

Poliedri

L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ è un semispazio chiuso di \mathbb{R}^n .

Definizione

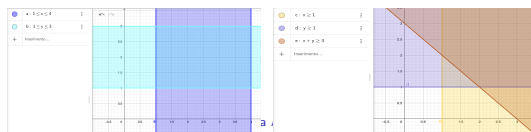
Un poliedro in \mathbb{R}^n è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi oppure, in modo equivalente, è l'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni lineari $Ax \leq b$.

La regione ammissibile di ogni problema di PL è un poliedro.

Esempi.

$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 3\}$ è un poliedro limitato.

$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}$ è un poliedro illimitato.



Direzioni di recessione

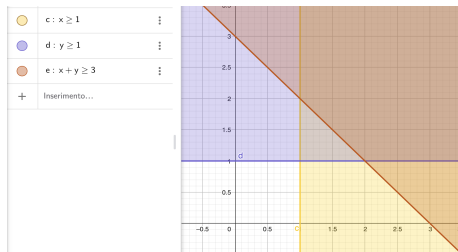
Definizione

Una **direzione di recessione** di un poliedro P è un **vettore d** tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha > 0$.

L'insieme di tutte le direzioni di recessione di un poliedro P è un cono convesso ed è denotato con $\text{rec}(P)$.

Esempio. $(1, 1)$ è una **direzione di recessione** del poliedro

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}.$$



Direzioni di recessione

Definizione

Una **direzione di recessione** di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha > 0$.

L'insieme di tutte le direzioni di recessione di un poliedro P è un cono convesso ed è denotato con $\text{rec}(P)$.

Esempio. $(1, 1)$ è una direzione di recessione del poliedro

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}.$$

Teorema

Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, allora $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.

Direzioni di linealità

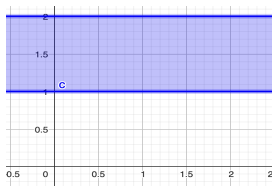
Definizione

Una **direzione di linealità** di un poliedro P è un **vettore d** tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'**insieme di tutte le direzioni di linealità** di un poliedro P è un **sottospazio vettoriale** ed è denotato con **$\text{lineal}(P)$** .

Esempio. $(1, 0)$ è una direzione di linealità del poliedro

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}.$$



Direzioni di linealità

Definizione

Una **direzione di linealità** di un poliedro P è un vettore d tale che $x + \alpha d \in P$ per ogni $x \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'insieme di tutte le direzioni di linealità di un poliedro P è un sottospazio vettoriale ed è denotato con $\text{lineal}(P)$.

Esempio. $(1, 0)$ è una direzione di linealità del poliedro

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Teorema

Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, allora $\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Vertici

Definizione

Un punto x di un poliedro P è chiamato **vertice** se non esistono due punti $y, z \in P$ diversi da x tali che x è combinazione convessa di y e z .

Esempi.

I vertici di $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 3\}$ sono $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(4, 1)$ e $(4, 3)$.

I vertici di $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}$ sono $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Il poliedro $P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}$ non ha vertici.

Teorema

Un poliedro P ha vertici se e solo se $\text{lineal}(P) = \{0\}$.

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Il poliedro è descritto da 2 sottoinsiemi:

- sottoinsieme dei vertici
- sottoinsieme delle direzioni di recessione

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Corollario 1. Se $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora v^1, \dots, v^m sono i vertici di P .

Corollario 2. Se P è un poliedro limitato, allora $P = \text{conv}(V)$, dove V è l'insieme dei suoi vertici.

Teorema di decomposizione dei poliedri

Teorema

Se P è un poliedro, allora esistono un sottoinsieme finito $\{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\{d^1, \dots, d^q\}$ di direzioni di recessione di P tali che

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \underbrace{\text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}}_{\text{rec}(P)}.$$

Corollario 1. Se $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora v^1, \dots, v^m sono i vertici di P .

Corollario 2. Se P è un poliedro limitato, allora $P = \text{conv}(V)$, dove V è l'insieme dei suoi vertici.

Esercizio. Scrivere la decomposizione dei seguenti poliedri:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$$

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$$

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}$$

Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Teorema fondamentale della PL

Supponiamo che la regione ammissibile

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono}\{d^1, \dots, d^q\}.$$

- ▶ Il valore ottimo di (\mathcal{P}) è finito se e solo se $c^T d^j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, q$, cioè nessuna direzione di recessione di P è una direzione di crescita.
- ▶ Se il valore ottimo di (\mathcal{P}) è finito, allora esiste un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^i è una soluzione ottima di (\mathcal{P}) .

Corollario. Se il poliedro P è limitato, allora un suo vertice è una soluzione ottima di (\mathcal{P}) .

Teorema fondamentale della PL

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Sappiamo che $P = \text{conv}\{(1, 2), (2, 1)\} + \text{cono}\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Il valore ottimo è $+\infty$ poiché la direzione di recessione $d = (1, 0)$ è una direzione di crescita, cioè $(2, -3)^T(1, 0) = 2 > 0$.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & -2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Il valore ottimo è finito perché nessuna delle due direzioni di recessione $(1, 0)$ e $(0, 1)$ è di crescita, cioè $(-2, -3)^T(1, 0) = -2$ e $(-2, -3)^T(0, 1) = -3$.

La soluzione ottima è il vertice $(2, 1)$.

Problema duale

Consideriamo un problema di PL forma canonica

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

che d'ora in poi sarà chiamato **problema primale**.

Definizione

Il problema di PL definito come

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \quad y \geq 0\} \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

è chiamato **problema duale** di (\mathcal{P}) .

	Primale	Duale
Obiettivo	max	min
Variabili	n	m
Vincoli	m	n

Problema duale

Esempio. Il problema duale di

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{P})$$

è il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 = 4 \\ y_2 + y_3 = 5 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad (\mathcal{D})$$

Proprietà del problema duale

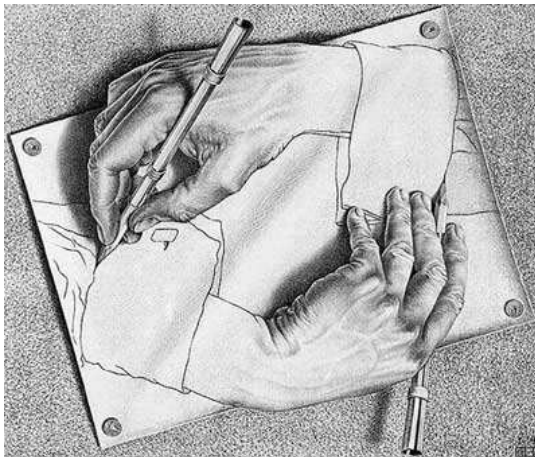
Perché è chiamato duale?

Proprietà del problema duale

Perché è chiamato duale?

Teorema

Il duale di (\mathcal{D}) è equivalente al problema (\mathcal{P}) .



M.C. Escher, Drawing Hands, 1948.

Proprietà del problema duale

Lemma di Farkas

I sistemi

$$\begin{cases} c^T x > 0 \\ Ax \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sono in alternativa, cioè se uno ammette soluzioni allora l'altro non ha soluzioni.

In termini di PL, il Lemma di Farkas equivale a dire che nel problema primale esiste una direzione di recessione che è anche di crescita se e solo se la regione ammissibile del problema duale è vuota.

Proprietà del problema duale

Esempio. Consideriamo il problema primale

$$\begin{cases} \max & 2x_1 - 3x_2 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Sappiamo che esiste una direzione di recessione che è di crescita. Verifichiamo ora che il suo problema duale ha la regione ammissibile vuota. Il duale è

$$\begin{cases} \min & -y_1 - y_2 - 3y_3 \\ & -y_1 - y_3 = 2 \\ & -y_2 - y_3 = -3 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Il primo vincolo di uguaglianza implica che $y_3 = -y_1 - 2 \leq -2$ che non è compatibile con la condizione $y_3 \geq 0$, quindi non esistono soluzioni ammissibili del problema duale.

Proprietà del problema duale

Esempio. Consideriamo il problema primale

$$\begin{cases} \max & -2x_1 - 3x_2 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Sappiamo che non esistono direzioni di recessione che sono di crescita. Verifichiamo ora che il suo problema duale ha la regione ammissibile non vuota. Il duale è

$$\begin{cases} \min & -y_1 - y_2 - 3y_3 \\ & -y_1 - y_3 = -2 \\ & -y_2 - y_3 = -3 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Dai due vincoli di uguaglianza si ottiene che $y_2 = y_1 + 1$ e $y_3 = 2 - y_1$. Esistono infinite soluzioni ammissibili del duale, ad esempio $y = (0, 1, 2)$.

Proprietà del problema duale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

in cui la regione ammissibile $P \neq \emptyset$.

Teorema di dualità forte

- ▶ Se il poliedro duale $D = \emptyset$, allora il valore ottimo del primale $v(\mathcal{P}) = +\infty$.
- ▶ Se il poliedro duale $D \neq \emptyset$, allora $v(\mathcal{P})$ è finito e $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D})$.

Proprietà del duale

Esempio. Consideriamo il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

Qual è il suo **valore ottimo**?

Proprietà del duale

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Qual è il suo **valore ottimo**? Questo problema è il duale di

$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è facile da risolvere graficamente: la **soluzione ottima è (1, 0)** ed il **valore ottimo è 2**.

Il **teorema di dualità forte** garantisce che anche il valore ottimo di (*) è 2.

Condizioni di ottimalità

Come riconoscere una soluzione ottima?

Condizioni di ottimalità

Come riconoscere una soluzione ottima?

Teorema (degli scarti complementari)

Supponiamo che \bar{x} sia una soluzione ammissibile del primale (\mathcal{P}). Allora \bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione \bar{y} del sistema

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T & \text{(ammissibilità)} \\ \bar{y} \geq 0 & \text{(duale)} \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 & \text{(scarti complementari)} \end{cases}$$

Qualunque soluzione \bar{y} di questo sistema è una soluzione ottima del duale (\mathcal{D}).

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (1, 1)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

\bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \geq 0 \\ y^T(0, 0, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_3 = y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 = 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$ è una soluzione del sistema, \bar{x} è ottima.

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (0, 0)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

\bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y_i \geq 0 \\ y^T(3, 3, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

$y_2 = -2y_1$
 $y_1 - 4y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$

che equivale a

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 = -3 \\ y_4 = -4 \\ y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

che è impossibile, quindi \bar{x} non è ottima.

Scarti complementari

Esercizio. Consideriamo il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \alpha x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

Per quali valori di α il vettore $\bar{x} = (1, 1)$ è ottimo?

Esercizio. Trovare tutte le soluzioni ottime del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 4x_1 + 7x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 \leq -1 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq -3 \end{array} \right.$$

e del suo duale utilizzando il teorema degli scarti complementari.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale. I vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico \rightarrow abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale. I vertici di un poliedro sono definiti in modo **geometrico** \rightarrow abbiamo bisogno di proprietà **algebriche** dei vertici.

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rank}(A) = n$ (e quindi $\text{lineal}(P) = \{0\}$).

[Questa ipotesi non è restrittiva perché ogni problema di PL è equivalente ad uno in cui le variabili $x \geq 0$, ponendo eventualmente $x = y - z$ con $y, z \geq 0$.]

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se $P \neq \emptyset$ e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale. I vertici di un poliedro sono definiti in modo **geometrico** \rightarrow abbiamo bisogno di proprietà **algebriche** dei vertici.

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rank}(A) = n$ (e quindi $\text{lineal}(P) = \{0\}$).

[Questa ipotesi non è restrittiva perché ogni problema di PL è equivalente ad uno in cui le variabili $x \geq 0$, ponendo eventualmente $x = y - z$ con $y, z \geq 0$.]

Definizione

Una **base** è un insieme B di n indici di riga tali che la **sottomatrice A_B** sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$. Indichiamo con N l'insieme degli indici non in base.

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

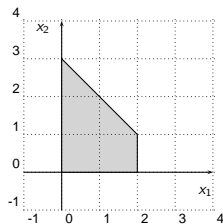
Data una base B , il vettore $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è chiamato **soluzione di base primale**.

\bar{x} è **ammissibile** se $A_N \bar{x} \leq b_N$. \bar{x} è **degenere** se esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} = b_i$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



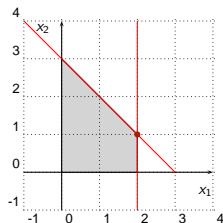
Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.
(Indici vincoli attivi)

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

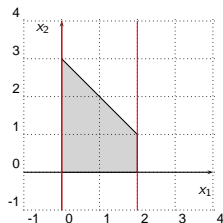
\bar{x} è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenerare perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

\bar{x} è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

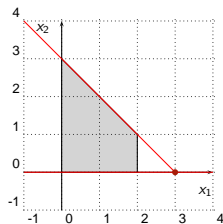
e non degenerare perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

\bar{x} è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenera perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

$B = \{2, 4\}$ è una base e la relativa soluzione di base primale non è ammissibile:

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$ e non degenera.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

\bar{x} è un vertice di P se e solo se \bar{x} è una soluzione di base primale ammissibile.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

\bar{x} è un vertice di P se e solo se \bar{x} è una soluzione di base primale ammissibile.

Come riconoscere un vertice ottimo?

Definizione

Data una base B , il vettore $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N = 0$

è chiamato **soluzione di base duale**.

\bar{y} è **ammissibile** se $\bar{y}_B \geq 0$. \bar{y} è **degenere** se esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$.

Teorema (condizione sufficiente di ottimalità)

Sia \bar{x} una soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B .

Se la soluzione di base duale \bar{y} relativa alla stessa base è **ammissibile**, allora \bar{x} è ottima per il problema primale (e \bar{y} è ottima per il duale).

Dim. \bar{x} e \bar{y} sono in scarti complementari, cioè $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

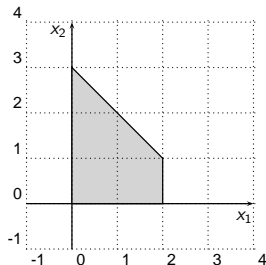
Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

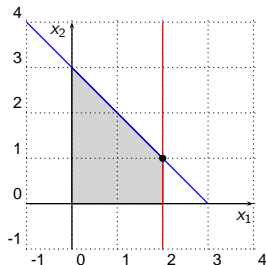
(Soluzione base primale)



Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

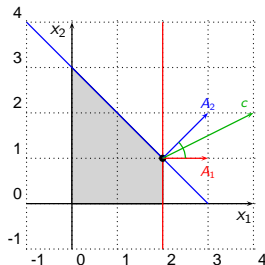


$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.

La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

\bar{y} è ammissibile perché $\bar{y}_B \geq 0$, ossia $c \in \text{cono}(A_1, A_2)$, quindi \bar{x} è ottima.

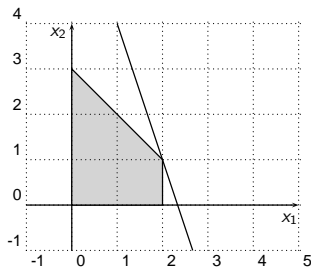
(insieme di tutte le combinazioni coniche di punti di K)

Caratterizzazione algebrica dei vertici

La condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base è sufficiente ma **non necessaria**.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

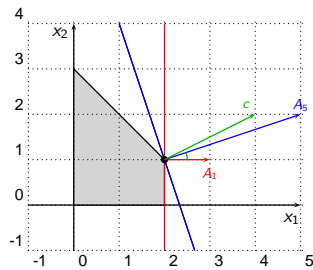


Caratterizzazione algebrica dei vertici

La condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma **non necessaria**.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è ottima ed è una **soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 5\}$** .

La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

\bar{y} non è ammissibile perché $\bar{y}_1 < 0$, ossia $c \notin \text{cono}(A_1, A_5)$, ma \bar{x} è ottima.

Algoritmo del simplesso primale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

in cui $\text{rank}(A) = n$ e quindi esistono vertici (soluzioni di base ammissibili) del poliedro primale.

L'algoritmo del simplesso primale parte da un vertice del poliedro primale.

Se il vertice del poliedro duale corrispondente alla stessa base è ammissibile, allora il vertice primale è ottimo e l'algoritmo si ferma. Altrimenti l'algoritmo trova una direzione di crescita per il primale.

Se tale direzione è di recessione per il poliedro primale, allora il valore ottimo del primale è $+\infty$ e l'algoritmo si ferma.

Altrimenti l'algoritmo trova una nuova base, cambiando un solo indice rispetto alla vecchia base, in modo che la nuova soluzione di base primale rimanga ammissibile (il nuovo vertice primale è adiacente al vertice precedente).

E così via . . .

Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ sia ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

3. Se $\bar{y}_B \geq 0$ allora STOP, \bar{x} è ottima.

altrimenti trova l'indice uscente (Di indice più piccolo)

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

poni $W = -A_B^{-1}$ e denota W^h la h -esima colonna di W .

4. Se $A_i W^h \leq 0$ per ogni $i \in N$ allora STOP, valore ottimo del primale $= +\infty$.

altrimenti calcola $\vartheta := \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} : i \in N, A_i W^h > 0 \right\},$

trova l'indice entrante

$$k = \min \left\{ i \in N : A_i W^h > 0, \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e torna al passo 2.

(Nuova base = vecchia base + nuova entrante - vecchia uscente)

Algoritmo del simplesso primale

Teorema

L'algoritmo del simplesso primale termina dopo un numero finito di iterazioni.

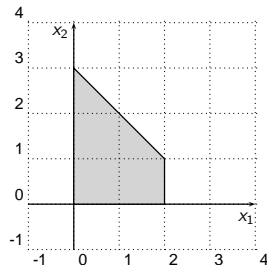
- ▶ Se il valore ottimo del problema è $+\infty$, l'algoritmo trova una direzione di recessione che è anche di crescita.
- ▶ Se il valore ottimo del problema è finito, l'algoritmo trova un vertice ottimo.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.



Algoritmo del semplice primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1), \quad h = 3, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^3 = 1, \quad A_2 W^3 = 1,$$

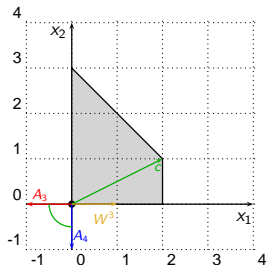
$$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2, \quad k = 1.$$

(1° rigo di $-A^{-1} \cdot 1$)

$A_1 \rightarrow$ rigo 1 matrice A
 $A_2 \rightarrow$ rigo 2 matrice A

$$y = c^T \cdot A^{-1} \cdot B$$

Vecchia uscente $\rightarrow 3$ (restano $\{1, 2, 4\}$)



Algoritmo del semplice primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

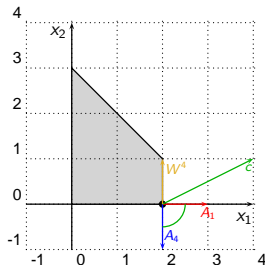
partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1), \quad h = 3, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^3 = 1, \quad A_2 W^3 = 1, \\ \vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2, \quad k = 1.$$

Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, (Ammissibile)

$$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1), \quad h = 4, \quad W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad A_2 W^4 = 1, \quad A_3 W^4 = 0, \quad k = 2.$$



Vecchia uscente $\rightarrow 4$ (restano $\{1, 2\}$)

Algoritmo del semplice primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

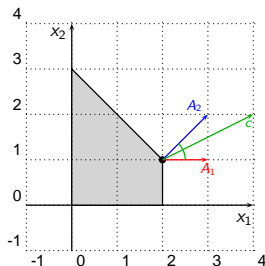
Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1), \quad h = 3, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^3 = 1, \quad A_2 W^3 = 1, \\ \vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2, \quad k = 1.$$

Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1), \quad h = 4, \quad W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad A_2 W^4 = 1, \quad A_3 W^4 = 0, \quad k = 2.$$

Iterazione 3. $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1, 1) \geq 0$ stop, \bar{x} è ottimo.

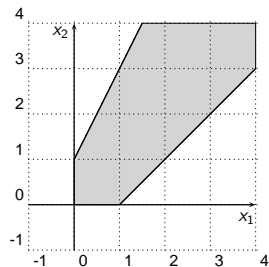


Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 - x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.



Algoritmo del simplesso primale

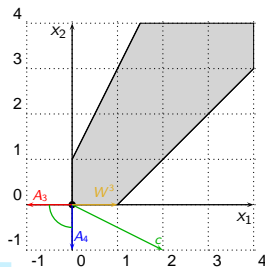
Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 - x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 1), \quad h = 3, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^3 = -2, \quad A_2 W^3 = 1, \quad k = 2.$$



Esce -> 3 (resta {1,2,4})

Algoritmo del semplice primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 - x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

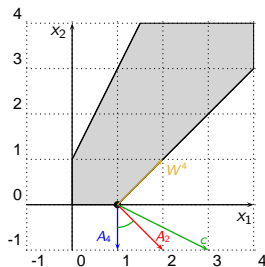
Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 1), \quad h = 3, \quad W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^3 = -2, \quad A_2 W^3 = 1, \quad k = 2.$$

Iterazione 2. $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = (2, -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1), \quad h = 4, \quad W^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad A_1 W^4 = -1, \quad A_3 W^4 = -1 \text{ stop,}$$

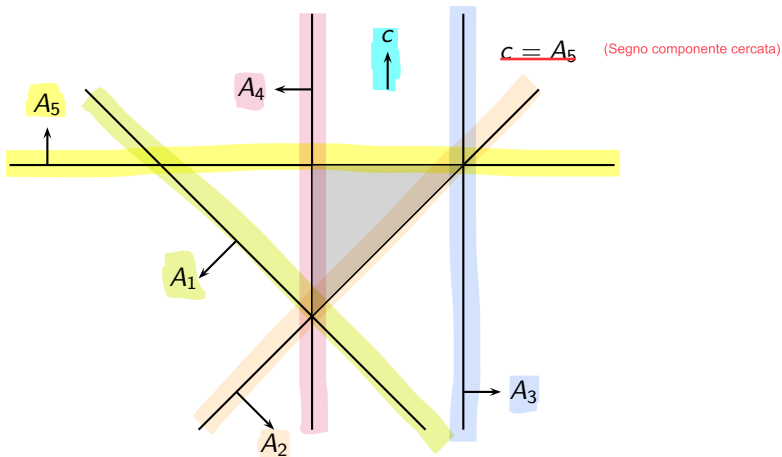
il valore ottimo è $+\infty$.



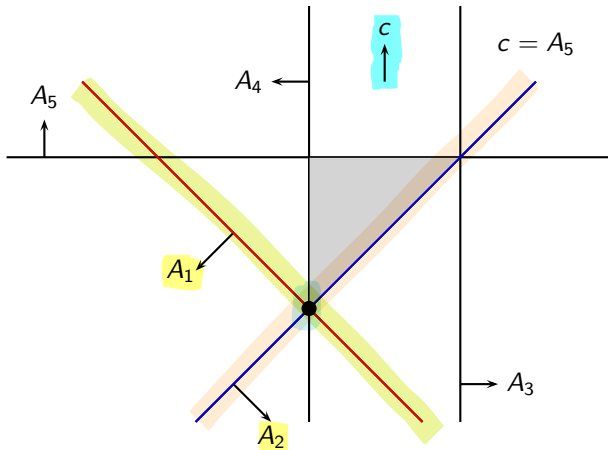
Esercizio. Verificare che il problema duale ha la regione ammissibile vuota.

Algoritmo del semplice primale

Esercizio. Si risolva **geometricamente** per mezzo dell'algoritmo del semplice primale il problema di PL in figura, **partendo dalla base $B = \{1, 2\}$** . Per ogni iterazione, **trovare la base**, la **soluzione di base primale**, il **segno delle componenti della soluzione di base duale**, l'**indice uscente**, la **direzione di spostamento**, l'**indice entrante**.

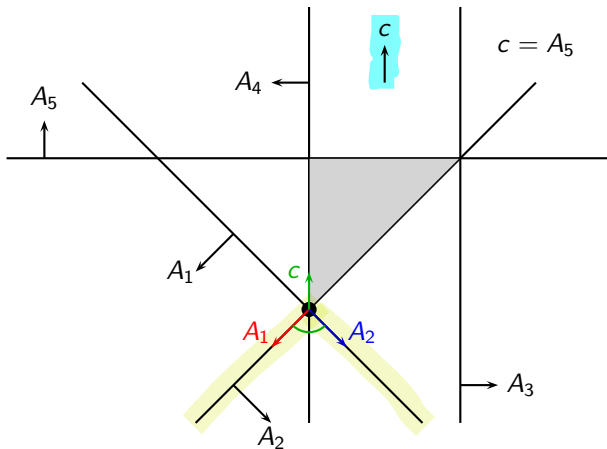


Algoritmo del simplesso primale



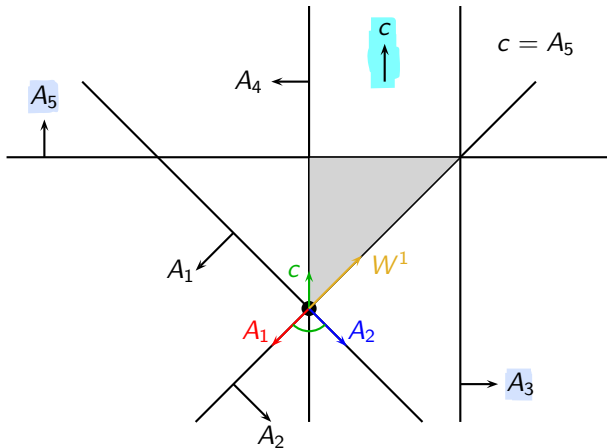
Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, \bar{x} indicata in figura,

Algoritmo del semplice primale



Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, \bar{x} indicata in figura, $c \in \text{int cono}(-A_1, -A_2)$, quindi $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_2 < 0$. (Essendo sia A_1 che A_2 negativi, sicuramente la soluzione di base duale sarà minore di zero)

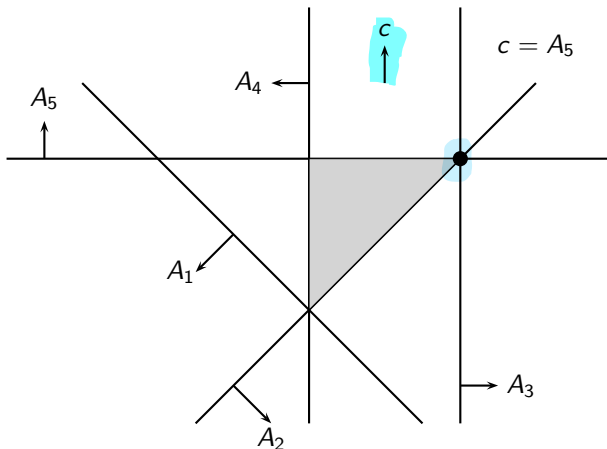
Algoritmo del semplice primale



Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, \bar{x} indicata in figura, $c \in \text{int cono}(-A_1, -A_2)$, quindi $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_2 < 0$. Indice uscente $h = 1$, W^1 indicata in figura, indice entrante $k = \min\{3, 5\} = 3$.

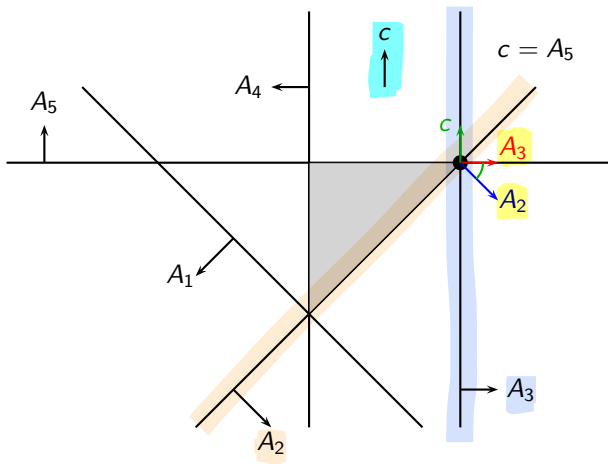
- (Uscente) -> sono in contrapposizione con W^1
- (Entrante) -> sono concordi a W^1

Algoritmo del simplesso primale



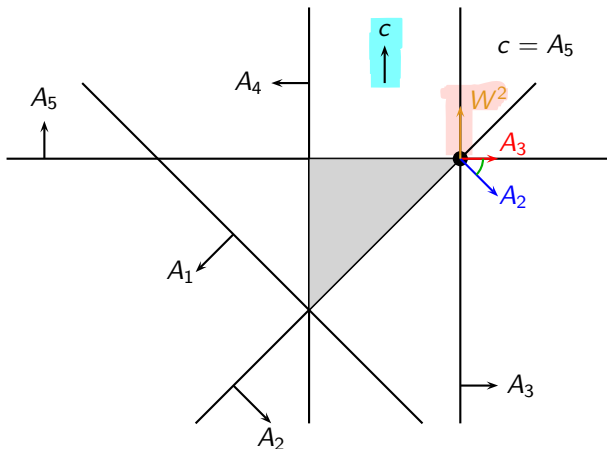
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, \bar{x} indicata in figura,

Algoritmo del simplesso primale



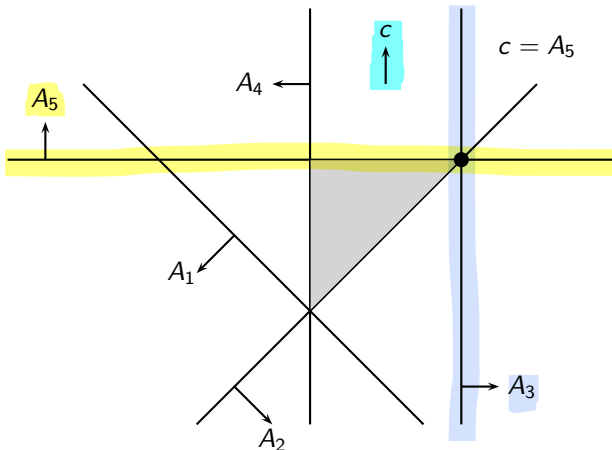
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, \bar{x} indicata in figura, $c \in \text{int cono}(-A_2, A_3)$, quindi $\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$.

Algoritmo del simplesso primale



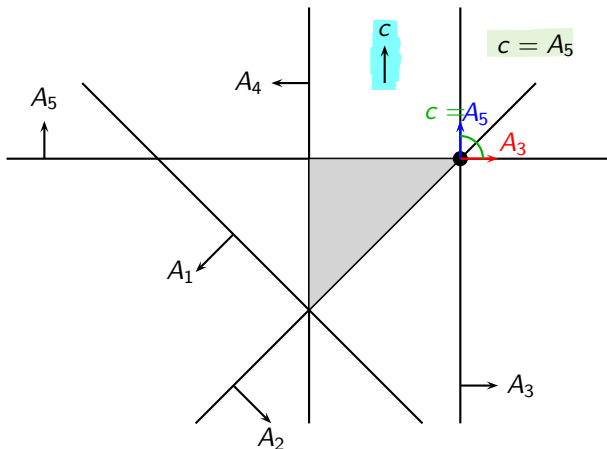
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, \bar{x} indicata in figura, $c \in \text{int cono}(-A_2, A_3)$, quindi $\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$. Indice uscente $h = 2$, W^2 indicata in figura, indice entrante $k = 5$.

Algoritmo del simplesso primale



Iterazione 3. $B = \{3, 5\}$, \bar{x} indicata in figura,

Algoritmo del simplesso primale



Iterazione 3. $B = \{3, 5\}$, \bar{x} indicata in figura, $c = A_5$, quindi $\bar{y}_3 = 0$, $\bar{y}_5 = 1$, stop \bar{x} è ottima.

Algoritmo del simplesso duale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

in cui $\text{rank}(A) = n$ e quindi esistono vertici del poliedro primale.

L'algoritmo del **simplesso duale** parte da un **vertice del poliedro duale**.

Se il vertice del poliedro primale corrispondente alla stessa base è ammissibile, allora il **vertice primale è ottimo** e l'algoritmo si ferma. Altrimenti l'algoritmo trova una **direzione di decrescita per il duale**.

Se tale **direzione è di recessione per il poliedro duale**, allora la **regione ammissibile del primale è vuota** e l'algoritmo si ferma.

Altrimenti l'algoritmo trova una nuova base, cambiando un solo indice rispetto alla vecchia base, in modo che la nuova **soluzione di base duale rimanga ammissibile** (il nuovo vertice duale è adiacente al vertice precedente).

E così via . . .

Algoritmo del simplesso duale

1. Trova una base B tale che la relativa soluzione di base duale

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0,$$

sia ammissibile.

2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$.

3. Se $A_N \bar{x} \leq b_N$ allora STOP, \bar{x} è ottima.

altrimenti trova l'indice entrante

$$k = \min \{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

$$\text{poni } \eta_B := A_k A_B^{-1}.$$

4. Se $\eta_B \leq 0$ allora STOP, la regione ammissibile del primale è vuota.

$$\text{altrimenti calcola } \vartheta = \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\},$$

trova l'indice uscente

$$h = \min \left\{ i \in B : \eta_i > 0, \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} = \vartheta \right\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ e torna al passo 2.

Algoritmo del simplesso duale

Teorema

L'algoritmo del simplesso duale termina dopo un numero finito di iterazioni.

- ▶ Se la regione ammissibile del primale è vuota, l'algoritmo trova una direzione di recessione per il duale che è anche di decrescita.
- ▶ Se la regione ammissibile del primale non è vuota, l'algoritmo trova un vertice ottimo.

Algoritmo del semplice duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del semplice duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$ quindi \bar{y} è ammissibile. $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N,$$

$$k = \min\{3, 4, 5\} = 3, \quad \eta_B = A_3 A_B^{-1} = (-1, 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2, 1), \quad h = 2. \quad (\text{Uscente} \rightarrow 2)$$

Algoritmo del sempliceo duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del sempliceo duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

Iterazione 2. $B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0), \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$k = \min\{4, 5\} = 4, \quad \eta_B = A_4 A_B^{-1} = (-2, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2), \quad \vartheta = \min\{1, 0\} = 0,$$

$$h = 3.$$

Algoritmo del semplice duale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con l'algoritmo del semplice duale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

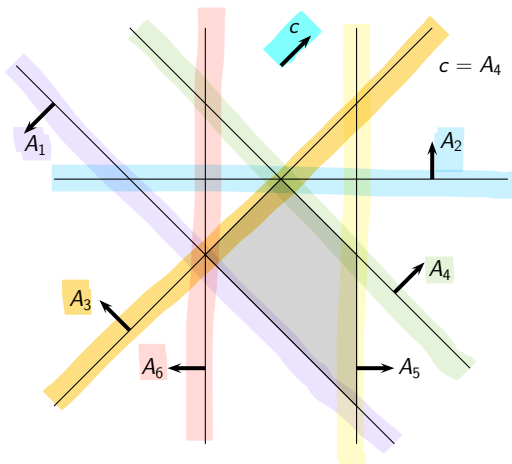
Iterazione 3. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $\bar{y}_B^T = (0, 1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

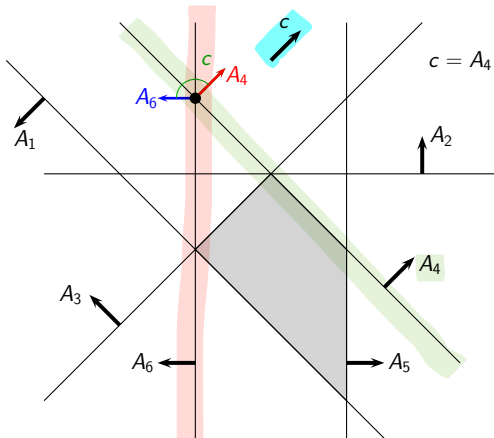
stop. $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima del primale e $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ una soluzione ottima del duale.

Algoritmo del semplice duale

Esercizio. Si risolva **geometricamente** per mezzo dell'**algoritmo del semplice duale** il problema di PL in figura, partendo dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione, trovare la base, la soluzione di base primale, l'indice entrante, i segni delle componenti dei vettori \bar{y}_B e η_B , l'indice uscente.



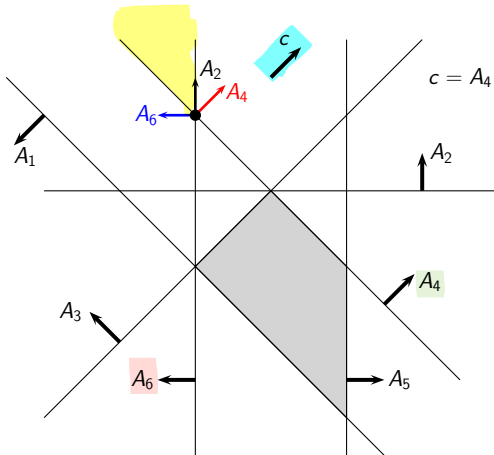
Algoritmo del simplesso duale



Iterazione 1. $B = \{4, 6\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_4 = 1$ e $\bar{y}_6 = 0$. \bar{x} indicata in figura viola i vincoli 2 e 3, $k = \min\{2, 3\} = 2$.

(C non riesce a coprire gli entranti 2 e 3)

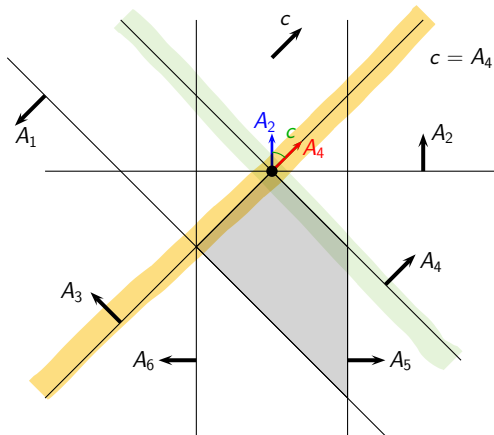
Algoritmo del semplice duale



Iterazione 1. $B = \{4, 6\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_4 = 1$ e $\bar{y}_6 = 0$. \bar{x} indicata in figura viola i vincoli 2 e 3, $k = \min\{2, 3\} = 2$.

$A_2 \in \text{int cono}(A_4, A_6)$, quindi $\eta_4 > 0, \eta_6 > 0$. Poiché $0 = y_6/\eta_6 < y_4/\eta_4$, si ottiene $h = 6$.

Algoritmo del simplesso duale



Iterazione 2. $B = \{2, 4\}$, $c = A_4$, quindi $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 = 1$. \bar{x} indicata in figura è ammissibile e quindi è ottima.